УДК 531.36

Л. Б. Ряшко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВУМЕРНОГО ТОРА

Введение

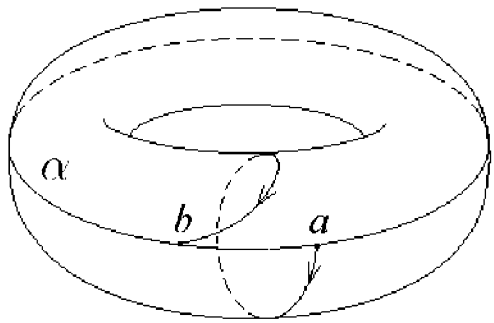
Рассмотрим детерминированную систему

$$dx = f(x)\,dt, \tag{1}$$

где x – n-вектор; $f(x)$ – достаточно гладкая функция соответствующей размерности. Предполагается, что система (1) имеет инвариантное двумерное тороидальное многообразие Γ.

Будем исходить из возможности следующей параметризации 2-тора Γ. Пусть на Γ (см. рисунок) лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая α (экватор), задаваемая функцией $\alpha(s)$ на интервале $0 \le s \le 1$ с условием $\alpha(0) = \alpha(1)$. Из каждой точки $\alpha(s)$ кривой α как начальной выходит решение $x(t,s)$ системы (1) с условием $x(0,s) = \alpha(s)$. Предполагается, что траектория $x(t,s)$, обойдя вокруг тора Γ, через некоторое время вновь пересечет кривую α. Пусть $T(s) = \min\{t > 0 \mid x(t,s) \in \alpha\}$ – момент первого возвращения траектории $x(t,s)$ на кривую α, при этом $x(T(s),s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ – точка интервала $[0,1)$, при которой $\alpha(\tau(s)) = x(T(s),s)$. Здесь $\tau(s)$ есть функция последования сечений Пуанкаре кривой α фазовыми траекториями системы (1).

Предполагается, что фазовые траектории $x(t,s)$ системы (1) полностью покрывают тор Γ. При этом тороидальная поверхность может составляться как из замкнутых фазовых траекторий (циклов) и траекторий, к ним сходящихся, так и состоять из семейства незамкнутых траекторий, лежащих всюду плотно на Γ (квазипериодический случай). Функция $x(t,s)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками 2-тора Γ и точками множества $D = \{(t,s) \mid 0 \le t < T(s),\ 0 \le s < 1\}$. Вектор-функции $\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}$, $\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}$ линейно независимы. При этом для каждой точки γ на торе Γ можно указать $t = t(\gamma),\ s = s(\gamma)$ такие, что $x(t,s) = \gamma$.



α – замкнутая кривая (экватор); $a = x(0,s) = \alpha(s)$ – начальная точка решения $x(t,s)$; $b = x(T(s),s) = \alpha(\tau(s))$ – точка первого возвращения решения $x(t,s)$ на кривую α

Стандартной моделью для случайных возмущений детерминированной системы (1) является система стохастических уравнений Ито

$$dx = f(x)dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x)dw_r(t). \tag{2}$$

Здесь $w_r(t)$ $(r = 1, \ldots, m)$ – независимые стандартные винеровские процессы, $\sigma_r(x)$ – достаточно гладкие вектор-функции соответствующей размерности. Для того чтобы тор Γ оставался инвариантным многообразием и для системы (2), предполагается

$$\sigma_r|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим в некоторой окрестности U тора Γ функцию $\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка 2-тора Γ. При этом $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – вектор отклонения x от Γ. Предполагается, что для систем (1) и (2) окрестность U инвариантна.

Определение 1. Тор Γ называется *экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном* (*ЭСК-устойчивым*) для системы (2) в U, если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ выполняется условие

$$E\|\Delta(x(t))\|^2 \le Ke^{-lt}E\|\Delta(x_0)\|^2,$$

где $x(t)$ – решение системы (2) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Начиная с работы [1] основным методом исследования устойчивости систем со случайными возмущениями является метод стохастических функций Ляпунова [2]. Квадратичные орбитальные функции Ляпунова использовались в анализе устойчивости и чувствительности стохастически возмущенных предельных циклов [3–5]. Соответствующий аналог для тороидальных многообразий дается следующим определением.

Рассмотрим в окрестности U функцию Ляпунова (ФЛ) $v(x)$:

$$v|_U \geq 0, \quad v|_\Gamma = 0, \quad v|_{U\setminus\Gamma} > 0. \tag{4}$$

Определение 2. Функция $v(x)$ называется *тороидально квадратичной* (*Г-квадратичной*), если при некоторых $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ в U выполняются неравенства

$$K_1\|\Delta(x)\|^2 \leq v(x) \leq K_2\|\Delta(x)\|^2. \tag{5}$$

Используя конструкцию Г-квадратичных ФЛ и производящий дифференциальный оператор L [2]

$$Lv(x) = \left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x}(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\sigma_r(x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)\sigma_r(x)\right),$$

для системы (2) можно получить следующий критерий, представляющий собой распространение на случай тора классических результатов [2, 6].

Теорема 1. *Для ЭСК-устойчивости тора* Г *системы* (2) *в* U *необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для некоторой* Г*-квадратичной ФЛ* $w(x)$ *существовала* Г*-квадратичная ФЛ* $v(x)$ *такая, чтобы в* U *было справедливо равенство*

$$Lv(x) = -w(x). \tag{6}$$

Теорема 1 сводит вопрос об устойчивости системы (2) к анализу разрешимости уравнения Ляпунова (6) вблизи тора Г. Для исследования разрешимости (6) рассмотрим локальное поведение функций $v(x)$, $Lv(x)$ и $w(x)$.

Рассмотрим разложение $v(x)$ в ряд Тейлора в точке $\gamma \in \Gamma$

$$v(x) = v(\gamma) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma), x-\gamma\right) + \frac{1}{2}\left(x-\gamma, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)(x-\gamma)\right) + O(|x-\gamma|^3).$$

В этом разложении благодаря (4) первым отличным от нуля будет квадратичный член. Здесь для каждой фиксированной точки $x \in U$ естественно взять $\gamma = \gamma(x)$. В результате получим

$$v(x) = \varphi(x) + O(|\Delta(x)|^3),\ \varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma(x))\Delta(x)),$$

где $\varphi(x)$ есть первое приближение функции $v(x)$ в окрестности U тора Г. Для фиксированного тора Г функцию $\varphi(x)$ однозначно определяет заданная на Г функция

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma),$$

значения которой при каждом $\gamma \in \Gamma$ есть симметрическая $n \times n$-матрица. Функцию $\varphi(x) = (\Delta(x), \Phi(\gamma(x))\Delta(x))$ естественно назвать *тороидальной квадратичной формой.*

Проведем через точку γ поверхности Γ произвольную гладкую кривую β, задаваемую параметрически функцией $\beta(\tau)$. Дифференцируя очевидное тождество $\frac{\partial v}{\partial x}(\beta(\tau)) \equiv 0$ по τ, получим тождество

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\beta(\tau))\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \equiv 0,$$

означающее, что

$$\Phi(\gamma)r(\gamma) \equiv 0, \tag{7}$$

где $r(\gamma)$ – произвольный вектор, касательный к тору Γ в точке γ.

Воспользовавшись параметризацией 2-тора, связанной с семейством решений $x(t, s)$, перейдем от функции $\Phi(\gamma)$, заданной на Γ, к функции

$$V(t, s) = \Phi(x(t, s)), \tag{8}$$

заданной на D. Естественная область изменения переменной s – окружность. При рассмотрении функции $\tau(s)$ на полуинтервале [0,1) неизбежно возникают разрывы. Для того чтобы обеспечить непрерывность $\tau(s)$, будем считать областью изменения s всю числовую ось. При этом исходную функцию $x(t, s)$ по переменной s следует считать периодической. Равенства $x(t, s+1) = x(t, s)$, $x(T(s) + t, s) = x(t, \tau(s))$ позволяют распространить функцию $V(t, s)$ на всю плоскость $\Pi = \{(t, s) \mid -\infty < t < +\infty,\ -\infty < s < +\infty\}$. При этом должны выполняться условия

$$V(t, s + 1) = V(t, s), \;\; V(T(s) + t, s) = V(t, \tau(s)). \tag{9}$$

Равенство $\Phi(\gamma) = V(t(\gamma), s(\gamma))$ позволяет по функции $V(t, s)$ однозначно восстановить $\Phi(\gamma)$.

При этом равенство (7), определяющее характер вырождения матриц $\Phi(\gamma)$, эквивалентно системе

$$V(t, s)\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} \equiv 0, \; V(t, s)\frac{\partial x(t, s)}{\partial s} \equiv 0,$$

которую, в свою очередь, можно записать в форме

$$V(t, s)y(t, s) = 0, \; V(t, s)z(t, s) = 0, \tag{10}$$

где

$$y(t, s) = f(x(t, s)), \tag{11}$$

а $z(t,s)$ – решение системы

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(t,s)z, \text{ где } F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)), \tag{12}$$

с начальным условием $z(0,s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$. Установленное таким образом соответствие функций $\Phi(\gamma)$ и $V(t,s)$ позволяет конструировать функции Ляпунова $v(x)$ с помощью функций $V(t,s)$ – элементов пространства Σ. Пространство Σ составляют функции $V(t,s)$, определенные и достаточно гладкие на плоскости Π со значениями – симметрическими $n \times n$-матрицами, для которых справедливы условия (9), (10). Каждому элементу $V(t,s)$ пространства Σ может быть поставлена в соответствие функция

$$v(x) = (\Delta(x), V(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x)). \tag{13}$$

Положительная определенность (4) этой функции связана со следующим свойством P-положительной определенности элемента $V(t,s)$.

Рассмотрим матрицу $P_{y,z}$, задающую оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y и z. Введем матрицу $P(t,s) = P_{y(t,s),z(t,s)}$, где $y(t,s)$ и $z(t,s)$ определены в (11), (12) и задают плоскость, касательную к 2-тору Γ в точке $x(t,s)$. Отметим, что

$$P_{y,z} = P_y - \frac{P_y z z^T P_y}{z^T P_y z}, \; P_y = I - \frac{yy^T}{y^T y}, \; r(P_{y,z}) = n-2.$$

Определение 3. Матрицу $V(t,s)$ из Σ будем называть $P(t,s)$-*положительно определенной в точке* (t,s), если для любого вектора u, такого, что $P(t,s)u \neq 0$, справедливо неравенство $(u, V(t,s)u) > 0$. Матрицу $V(t,s)$, являющуюся $P(t,s)$-положительно определенной при любых $(t,s) \in \Pi$, будем называть P-*положительно определенной*.

В пространстве Σ рассмотрим конус матриц

$$\mathcal{K} = \{V \in \Sigma \mid V(t,s) \text{ – неотрицательно определенная при любых } (t,s) \in \Pi\}$$

и множество $\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma \mid V \text{ – } P\text{-положительно определенная}\}$. Отметим, что выбор $V(\cdot,\cdot)$ из $\mathcal{K}_P$ гарантирует положительную определенность (4) для $v(x)$ из (13).

В результате параметризация тора, связанная с семейством решений $x(t,s)$, позволяет построить в U следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} v(x) &\doteq (\Delta(x), V(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x))\,, \\ w(x) &\doteq (\Delta(x), W(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x))\,, \\ Lv(x) &\doteq (\Delta(x), \mathcal{L}[V](t(\gamma(x)), s(\gamma(x))\Delta(x))\,, \end{aligned}$$

где

$$V(t,s) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x(t,s)), \quad W(t,s) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x(t,s)),$$

$$\mathcal{L}[V] = \frac{\partial V}{\partial t} + F^\top V + VF + \sum_{r=1}^{m} S_r^\top V S_r, \tag{14}$$

$$F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)), \quad S_r(t,s) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(x(t,s)),$$

имеющие порядок точности $O(\|\Delta(x)\|^3)$.

Данные аппроксимации позволяют записать критерий теоремы 1 в следующей матричной форме.

Теорема 2. *Для ЭСК-устойчивости тора* Γ *системы* (2) *в* U *необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для некоторой матрицы* $W \in \mathcal{K}_P$ *существовало решение* $V \in \mathcal{K}_P$ *уравнения*

$$\mathcal{L}[V] = -W. \tag{15}$$

Теорема 2 сводит вопрос об устойчивости тора Γ к исследованию разрешимости уравнения Ляпунова (15) в пространстве P-положительно определенных матриц $\mathcal{K}_P$. Технические детали доказательства этой теоремы аналогичны построениям, представленным в [3] для критерия устойчивости стохастически возмущенного предельного цикла.

В исследованиях по устойчивости точки покоя задачу построения ФЛ нелинейной системы традиционно связывают с выбором ФЛ для соответствующей системы первого приближения. В случае стохастических систем с предельным циклом конструкции систем первого приближения и анализ их устойчивости рассмотрены в [4]. Данная работа посвящена распространению этих результатов на случай более сложного многообразия – двумерного тора.

Раздел 1 посвящен анализу связанных с (2) систем первого приближения, конструируемых на основе семейства решений $x(t,s)$, задающих естественную параметризацию тора Γ. Характерной особенностью этих систем является наличие двух линейно независимых детерминированных решений. В связи с проектором P, сопровождающим эти два решения, для таких линейных систем вводится понятие экспоненциальной P-устойчивости в среднем квадратичном. Необходимым и достаточным условием такой P-устойчивости (теорема 3) является существование решения у матричного дифференциального уравнения Ляпунова (15). Результаты разд. 1 позволяют придать критерию устойчивости 2-тора Γ (теорема 4) традиционную форму теоремы об устойчивости по первому приближению.

Решать вопрос об устойчивости, напрямую исследуя разрешимость матричного уравнения Ляпунова, часто бывает затруднительно, особенно в случаях, близких к критическим. Для систем с постоянными коэфициентами на основе спектральной теории положительных операторов были получены [7–9] достаточно простые и эффективные критерии стохастической устойчивости и стабилизируемости. Данный подход был использован в [4] для получения критериев устойчивости стохастически возмущенных периодических движений и в [10] при исследовании устойчивости стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В разд. 2 и 3 аналогичный подход применен к исследованию устойчивости тороидальных движений.

В разд. 4 на основе спектрального подхода выводится параметрический критерий устойчивости 2-тора для случая трехмерного пространства. Полученные результаты иллюстрируются на примере в разд. 5.

1. Система первого приближения и ее P-устойчивость

Рассмотрим для нелинейных систем (1) и (2) в окрестности решений семейства $x(t,s)$ системы первого приближения

$$du = F(t,s)udt, \tag{1.1}$$

$$du = F(t,s)udt + \sum_{r=1}^{m} S_r(t,s)udw_r. \tag{1.2}$$

Из условия (3) следует тождество $\sigma_r(x(t,s)) \equiv 0$, означающее, в частности

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma_r(x(t,s))\right] = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}\left(x(t,s)\right)\frac{\partial x}{\partial t}(t,s) \equiv 0,\\ \frac{\partial}{\partial s}\left[\sigma_r(x(t,s))\right] = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}\left(x(t,s)\right)\frac{\partial x}{\partial s}(t,s) \equiv 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Функции $y(t,s) = \frac{\partial x}{\partial t}(t,s)$, $z(t,s) = \frac{\partial x}{\partial s}(t,s)$, будучи решениями системы (1.1) и удовлетворяя в силу (1.3) равенствам

$$S_r(t,s)y(t,s) \equiv 0, \quad S_r(t,s)z(t,s) \equiv 0, \tag{1.4}$$

являются решениями и стохастической системы (1.2).

Отметим, что значения производящего дифференциального оператора L_1 системы (1.2)

$$L_1 v(t,s,u) = \frac{\partial v}{\partial t}(t,s,u) + \left(F(t,s)u, \frac{\partial v}{\partial u}(t,s,u)\right) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}(S_r(t,s)u, \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}(t,s,u)S_r(t,s)u)$$

для квадратичных форм $v(t,s,u) = (u, V(t,s)u)$ выражаются через значения $\mathcal{L}[V]$ из (14) соотношением

$$L_1(u, V(t,s)u) = (u, \mathcal{L}[V]u). \tag{1.5}$$

Точка покоя $u = 0$ системы (1.2) из-за наличия квазипериодических решений $y(t,s)$ и $z(t,s)$ не может быть экспоненциально устойчивой в традиционном смысле. Здесь рассматривается более слабый аналог такой устойчивости, определяемый с помощью проектора $P(t,s) = P_{y(t),z(t)}$.

Определение 4. Тривиальное решение $u = 0$ системы (1.2) будем называть *экспоненциально P-устойчивым в среднем квадратичном,* если существуют такие $K > 0,\ l > 0$, что

$$E\|P(t,s)u(t,s)\|^2 \le Ke^{-lt}E\|P(0,s)u_0(s)\|^2$$

при любых $t > 0,\ s \in [0,1]$ и любых начальных условиях $u(0,s) = u_0(s)$ решения $u(t,s)$ системы (1.2). При этом для краткости систему (1.2) будем называть *P-устойчивой.*

Теорема 3. *Пусть система* (1.2) *является P-устойчивой. Тогда*

а) *при любой матрице $W \in \mathcal{K}$ уравнение*

$$\mathcal{L}[V] = -W \tag{1.6}$$

имеет в $\mathcal{K}$ единственное решение – матрицу $V \in \mathcal{K}$;

б) *если $W \in \mathcal{K}_P$, то $V \in \mathcal{K}_P$.*

Пусть для некоторой матрицы $W \in \mathcal{K}_P$ уравнение (1.6) *имеет решение $V \in \mathcal{K}_P$. Тогда система* (1.2) *является P-устойчивой.*

Доказательство. Необходимость. Для произвольного элемента $W \in \mathcal{K}$ рассмотрим $V_\theta(\tau,s)$ – решение уравнения (1.6) на интервале $t \le \tau \le \theta$ с условием $V_\theta(\theta,s) = 0$.

Пусть $u(\tau,s)$ – решение уравнения (1.2) с условием $u(t,s) = u$. Из формулы Ито и (1.5),(1.6) следуют равенства

$$\frac{d}{d\tau}E\left[u^\top(\tau,s)V_\theta(\tau,s)u(\tau,s)\right] = E\left[u^\top(\tau,s)\mathcal{L}[V_\theta(\tau,s)]u(\tau,s)\right] = \\ = -E\left[u^\top(\tau,s)W(\tau,s)u(\tau,s)\right],$$

интегрирование которых по отрезку $[t,\theta]$ с учетом $u(t,s) = u, V_\theta(\theta,s) = 0$ дает

$$u^\top V_\theta(t,s)u = \int_t^\theta E\left[u^\top(\tau,s)W(\tau,s)u(\tau,s)\right]d\tau.$$

Полученный интеграл монотонно возрастает по θ и благодаря P-устойчивости сходится. Устремляя $\theta \to \infty$, получим матрицу

$$V(t,s) = \lim_{\theta\to\infty} V_\theta(t,s),$$

являющуюся решением уравнения (1.6).

Обоснования, касающиеся свойств предельной матрицы $V(t,s)$, а также единственности решения уравнения (1.6), опускаем.

Достаточность. Пусть $V \in \mathcal{K}_P$ и $W \in \mathcal{K}_P$ связаны уравнением (1.6). Это означает, что для произвольного решения $u(t,s)$ уравнения (1.2) справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}E\left[u^\top(t,s)V(t,s)u(t,s)\right] = -\,E\left[u^\top(t,s)W(t,s)u(t,s)\right]. \tag{1.7}$$

Поскольку $V, W \in \mathcal{K}_P$, то найдутся такие $k_i > 0$ $(i = 1,2,3)$, что

$$k_1 V(t,s) \le W(t,s), \tag{1.8}$$

$$k_2 P(t,s) \le V(t,s) \le k_3 P(t,s). \tag{1.9}$$

Из (1.7) и (1.8) следует неравенство

$$E\left[u^\top(t,s)V(t,s)u(t,s)\right] \le e^{-k_1 t}E\left[u^\top(0,s)W(0,s)u(0,s)\right], \tag{1.10}$$

а из (1.9) и (1.10) – неравенство

$$E\|P(t,s)u(t,s)\|^2 \le \frac{k_3}{k_2}e^{-k_1 t}E\|P(0,s)u(0,s)\|^2,$$

означающее P-устойчивость системы (1.2).

Из теорем 2 и 3 следует

Теорема 4. *Для ЭСК-устойчивости тора* Γ *системы* (2) *в* U *необходима и достаточна* P*-устойчивость системы первого приближения* (1.2).

2. Спектральный критерий P-устойчивости

Представим оператор $\mathcal{L}$ из (14) в виде суммы

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{S}$$

операторов $\mathcal{A}$ и S, задаваемых на элементах пространства Σ равенствами

$$\mathcal{A}[V] = \frac{\partial V}{\partial t} + F^\top V + VF, \quad S[V] = \sum_{r=1}^{m} S_r^\top V S_r.$$

При этом уравнение (1.6) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}[V] + \mathcal{S}[V] = -W. \tag{2.1}$$

В предположении P-устойчивости детерминированной системы (1.1) из теоремы 3 следует существование обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$, причем $\mathcal{A}^{-1}$ – отрицательный. Умножая (2.1) на $\mathcal{A}^{-1}$, получим

$$V - \mathcal{P}[V] = \mathcal{A}^{-1}[W],$$

где оператор $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$ как произведение положительных операторов $-\mathcal{A}^{-1}$ и $\mathcal{S}$ также является положительным.

Теперь вопрос о P-устойчивости системы (1.2) сводится к оценке спектрального радиуса $\rho(\mathcal{P})$ оператора $\mathcal{P}$.

Теорема 5. *Для того чтобы система* (1.2) *была P-устойчива, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *система* (1.1) *была P-устойчива;*

б) *выполнялось неравенство* $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [4] и опирается на спектральную теорию положительных операторов [11].

Замечание 1. Спектральный радиус $\rho = \rho(\mathcal{P}) \neq 0$ задает бифуркационное значение $\varepsilon^* = \sqrt{1/\rho}$ интенсивности $\varepsilon \geq 0$ случайных помех для системы

$$du = F(t,s)udt + \varepsilon \sum_{r=1}^{m} S_r(t,s)udw_r. \tag{2.2}$$

Система (2.2) устойчива для всех $\varepsilon < \varepsilon^*$ и неустойчива при всех $\varepsilon \geq \varepsilon^*$. Случай $\rho = 0$ означает устойчивость системы (2.2) при любых $\varepsilon \geq 0$.

Замечание 2. В случае когда точное отыскание спектрального радиуса ρ затруднительно, представляют интерес и его оценки: $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Действительно, неравенство $\rho_2 < 1$ дает достаточное, а $\rho_1 < 1$ – необходимое условие устойчивости. При этом разность $\rho_2 - \rho_1$ может служить мерой грубости данных условий устойчивости.

3. Оценки спектрального радиуса оператора $\mathcal{P}$ для системы с одним шумом

Рассмотрим стохастическую систему

$$du = F(t,s)udt + \sqrt{u^\top Q(t,s)u}d\eta, \tag{3.1}$$

где $\eta(t)$ – n-мерный винеровский процесс с параметрами

$$Ed\eta = 0, \quad Ed\eta d^\top\eta = G(t,s)dt, \quad Q \in \mathcal{K}_P, \quad G \in \mathcal{K}_P.$$

Замечание 3. Система (3.1) содержит всего один мультипликативный (векторный) шум. Интенсивность этого шума определяется скалярной величиной $\|u\|_Q = \sqrt{u^\top Qu}$ – нормой отклонения состояния системы u от начала координат. Шумы такого типа (второго типа) были введены в [8]. Во многих важных случаях форма шумов второго типа более естественна. Так, например, в случае уравнения n-го порядка все действующие шумы первого типа можно заменить одним шумом второго типа (см. [4], замеч. 2). Шумы второго типа устроены проще шумов первого типа. Используя, например, один шум второго типа в качестве мажоранты сразу для нескольких шумов первого типа, можно получить простые достаточные условия устойчивости системы с шумами первого типа (см. [4], замеч. 6). В данной работе возможность замены в системе первого приближения всех действующих шумов на один шум второго типа является существенным элементом анализа устойчивости тора в трехмерном пространстве (см. разд. 4).

Для системы (3.1) в разложении оператора Ляпунова $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{S}$ оператор $\mathcal{S}$, связанный со случайными помехами, имеет простую структуру:

$$\mathcal{S}[V] = tr(VG) \cdot Q.$$

Здесь и далее предполагается P-устойчивость системы (1.1), что гарантирует существование обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$, а значит и оператора $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$.

При этом значение $W = \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]$ есть матрица $W \in \mathcal{K}_P$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathcal{A}[W] = \frac{\partial W}{\partial t} + F^\top W + WF = -\mu Q,$$

где

$$\mu(t,s) = tr(V(t,s)G(t,s)).$$

Пусть $V \in \mathcal{K}_P$ – собственный вектор оператора $\mathcal{P}$, отвечающий собственному значению, равному спектральному радиусу $\rho = \rho(\mathcal{P})$. Из соотношений

$$\rho V = \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[\mu Q], \quad \mu = tr(VG)$$

следует равенство

$$\rho \cdot \mu = -tr(\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]G), \tag{3.2}$$

означающее, что функция $\mu = tr(VG)$ является собственной (с тем же собственным значением ρ) для оператора $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}[\varphi] = -tr(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q]G).$$

Оператор $\mathcal{B}$ определен на пространстве Σ^1 непрерывно-дифференцируемых скалярных функций, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(t, s+1) = \varphi(t, s), \ \varphi(t + T(s), s) = \varphi(t, \tau(s)).$$

Оператор $\mathcal{B}$ положителен на конусе $\mathcal{K}^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 | \varphi(t, s) \geq 0\}$ с внутренностью $\mathcal{K}_P^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 | \varphi(t, s) > 0\}$.

Лемма 1. *Операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{B}$ имеют одинаковые спектральные радиусы: $\rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Поскольку, как показано выше, величина $\rho(\mathcal{P})$ есть собственное значение оператора $\mathcal{B}$, то $\rho(\mathcal{P}) \leq \rho(\mathcal{B})$. Пусть $\mu \in \mathcal{K}_P^1$ – собственная функция оператора $\mathcal{B}$, отвечающая собственному значению, равному спектральному радиусу $\rho = \rho(\mathcal{B})$. Для матрицы $V = -\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]$ с учетом (3.2) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}S[-\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]] = -\mathcal{A}^{-1}[tr(-\mathcal{A}^{-1}[\mu Q] \cdot G)Q] = \\ = -\mathcal{A}^{-1}[\rho\mu Q] = -\rho\mathcal{A}^{-1}[\mu Q] = \rho V,\end{aligned}$$

означающие, что ρ есть собственное значение оператора $\mathcal{P}$, и, следовательно, $\rho(\mathcal{B}) \leq \rho(\mathcal{P})$. В итоге имеем $\rho(\mathcal{B}) = \rho(\mathcal{P})$.

Будем рассматривать квазипериодический случай. Определим в пространстве Σ скалярное произведение

$$\langle V, W \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T tr(VW)dt.$$

Для оператора $\mathcal{A}$ сопряженным будет оператор $\mathcal{A}^*$:

$$\mathcal{A}^*[V] = -\frac{\partial V}{\partial t} + FV + VF^\top,$$

при этом оператор $\mathcal{B}^*$, сопряженный для $\mathcal{B}$, имеет представление

$$\mathcal{B}^*[\psi] = -tr(Q(\mathcal{A}^*)^{-1}[\psi G]).$$

Рассмотрим произвольную функцию δ из $\mathcal{K}_P^1$ и μ, собственную функцию оператора $\mathcal{B}$, соответствующую собственному значению ρ и удовлетворяющую условию нормировки

$$\langle \mu, \delta \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu(t,s)\delta(t,s)dt = 1. \tag{3.3}$$

Из равенства $\rho \cdot \mu = \mathcal{B}[\mu]$ и (3.3) следует, что

$$\rho = \langle \mathcal{B}[\mu], \delta \rangle = \langle \mu, \mathcal{B}^*[\delta] \rangle = \langle \mu, \delta\varphi \rangle, \tag{3.4}$$

где $\varphi = \mathcal{B}^*[\delta]/\delta$. Если в качестве δ взять собственную функцию $\bar{\delta}$ оператора $\mathcal{B}^*$, соответствующую собственному значению $\rho = \rho(\mathcal{B}^*) = \rho(\mathcal{B})$, то функция φ становится константой $\varphi(t,s,\bar{\delta}) \equiv \rho$. В результате с учетом соотношений (3.3), (3.4) справедлива

Лемма 2. *Спектральный радиус ρ оператора $\mathcal{B}$ при любой функции $\delta \in \mathcal{K}_P^1$ удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{\Pi} \varphi(t,s,\delta) \le \rho \le \max_{\Pi} \varphi(t,s,\delta), \tag{3.5}$$

$$\rho = \min_{\delta\in\mathcal{K}_P^1} \max_{\Pi} \varphi(t,s,\delta) = \max_{\delta\in\mathcal{K}_P^1} \min_{\Pi} \varphi(t,s,\delta). \tag{3.6}$$

Замечание 4. Построение функции φ, в силу равенства $\varphi = \varphi(t,s,\delta) = tr(QD)/\delta$, связано с отысканием матрицы $D = -\mathcal{A}^{*-1}[\delta G]$ – единственного в $\mathcal{K}$ решения уравнения

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + FD + DF^\top = -\delta G. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) имеет простой вероятностный смысл. Его решение $D = E\{\bar{u}(t,s)\bar{u}^\top(t,s)\}$ есть матрица вторых моментов решения $\bar{u}$ стохастической системы

$$du = F(t,s)udt + \sqrt{\delta(t,s)}d\eta, \tag{3.8}$$

получаемой из (3.1) заменой мультипликативного шума на соответствующий аддитивный. При этом $\bar{u}(t,s)$ – установившийся в (3.8) случайный процесс, к которому благодаря P-устойчивости системы (1.1) сходятся в среднем квадратичном все другие решения системы (3.8) независимо от выбора начального состояния $u(0,s) = u_0(s)$ в условиях $P(0,s)u_0(s) = u_0(s)$. Таким образом, и матрицу D решения уравнения (3.7) можно находить соответствующим методом установления.

Замечание 5. Представленная здесь для системы (3.1) возможность перейти от оператора $\mathcal{P}$, действующего в пространстве матричных функций размерности $n \times n$, к существенно более простому оператору $\mathcal{B}$, заданному на пространстве скалярных функций, позволяет сделать достаточно конструктивным анализ устойчивости на основе спектрального критерия (теорема 5). Соотношения (3.5), (3.6) могут служить основой для разработки разнообразных вариационных методов оценивания спектрального радиуса оператора $\mathcal{B}$. Повышение точности численных методов при построении таких оценок позволит в конечном счете (см. замеч. 2) получить достаточные условия устойчивости, близкие к необходимым.

4. Устойчивость 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим при $n = 3$ систему (2) и систему первого приближения (1.2). В трехмерном случае матрица проектирования имеет ранг, равный единице, и может быть записана в форме $P(t,s) = p(t,s)p^\top(t,s)$, где $p(t,s)$ – нормированный вектор, ортогональный векторам $y(t,s)$ и $z(t,s)$. При этом для матриц S_r благодаря (1.4) справедливо представление $S_r = a_r p^\top$, где $a_r = S_r p$. Это позволяет m шумов системы (1.2) заменить одним шумом и записать систему (1.2) в эквивалентной форме (3.1) с $Q = P$, $\eta = \sum a_r w_r$, $G = \sum a_r a_r^\top = \sum S_r S_r^\top$. Для оператора $\mathcal{B}$ системы (3.1) собственное значение ρ и соответствующая собственная функция $\mu \in \mathcal{K}_P^1$ в данном случае связаны соотношением

$$\rho\mu = -tr(\mathcal{A}^{-1}[\mu P]G). \tag{4.1}$$

Матрица $V = -\mathcal{A}^{-1}[\mu P]$ при $n = 3$ имеет ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $V = \delta \cdot P$, где δ – скалярная функция ($\delta \in \mathcal{K}_P^1$).

Из соотношений $\delta P = -\mathcal{A}^{-1}[\mu P]$, $p^\top \frac{\partial P}{\partial t} p \equiv 0$ следуют равенства

$$\mu = -p^\top \mathcal{A}[\delta P]p = -\left[\frac{\partial \delta}{\partial t} + p^\top [F^\top + F]p \cdot \delta\right],$$

из которых и из (4.1) вытекает, что

$$\rho\left[\frac{\partial \delta}{\partial t} + \alpha \cdot \delta\right] + \beta\delta = 0, \tag{4.2}$$

где $\alpha = p^\top [F^\top + F]p$, $\beta = trG$.

Разделив (4.2) на δ и воспользовавшись равенством

$$\langle \frac{\partial \delta}{\partial t} / \delta \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \delta}{\partial t} / \delta dt = 0,$$

получим для ρ явное выражение $\rho = -\frac{\langle\beta\rangle}{\langle\alpha\rangle}$. Величина ρ после усреднения по t функций α и β остается функцией от s: $\rho = \rho_s$. В результате

$$\rho(\mathcal{B}) = \max_s \left\{ -\frac{\langle\beta\rangle}{\langle\alpha\rangle} \right\}.$$

Неравенство $\max_s\langle\alpha\rangle < 0$ служит необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости 2-тора Γ для детерминированной системы (1). При этом неравенство $\rho(\mathcal{B}) < 1$ (см. теоремы 4 и 5), записанное в виде

$$\max_s\langle\alpha + \beta\rangle = \max_s \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T tr[2F(t,s) + \sum_{r=1}^m S_r(t,s)S_r^\top(t,s)]dt < 0, \quad (4.3)$$

является необходимым и достаточным условием ЭСК-устойчивости 2-тора Γ для стохастической системы (2) при $n = 3$.

Замечание 6. Функция $\gamma(s) = \langle\alpha + \beta\rangle$ в квазипериодическом случае есть константа

$$\gamma(s) \equiv \gamma_0 = \frac{1}{S} \int_\Gamma \left[2\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx.$$

Если $x(t,s)$ есть цикл с периодом $T(s)$: $x(t + T(s), s) = x(t,s)$, то

$$\gamma(s) = \frac{1}{T(s)} \int_0^{T(s)} (\alpha(t,s) + \beta(t,s))dt.$$

Для тора, целиком состоящего из циклов, функция $\gamma(s)$ может принимать различные значения (для каждого цикла свое). Если $x(t,s)$ – решение, сходящееся при $t \to \infty$ к предельному циклу $x(t,s^*)$, то $\gamma(s) = \gamma(s^*)$. Для тора, состоящего из конечного числа чередующихся устойчивых и неустойчивых циклов, функция $\gamma(x)$ кусочно-постоянна. При этом для s, соответствующего неустойчивому циклу, γ имеет изолированное значение, а на интервале значений s, отвечающих всем траекториям, сходящимся к одному циклу, является константой.

5. Пример

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x,y,z) 2-тор Γ, задаваемый уравнением

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = r_0^2, \quad 0 < r_0 < 2.$$

В новых переменных r, φ, ψ, связанных со старыми соотношениями

$$x = (2 + r\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (2 + r\cos\psi)\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

тороидальная поверхность задается совсем просто:

$$r = r_0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot{r} =& f(r, \varphi, \psi) + \sigma(r, \varphi, \psi)\dot{w}, \\ \dot{\varphi} =& \alpha, \\ \dot{\psi} =& \beta, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где f и σ – 2π-периодические функции по переменным φ и ψ. Предполагается, что $f(r_0, \varphi, \psi) = 0$ и $\sigma(r_0, \varphi, \psi) = 0$ при всех φ и ψ. Данные условия означают, что тор Γ является инвариантным многообразием для (5.1) и может быть параметризован семейством решений

$$r(t) \equiv r_0, \;\; \varphi(t, s) = \alpha t + s, \;\; \psi(t) = \beta t,$$

где роль одного из параметров играет время t, а другим является начальное состояние $\varphi(0, s) = s$.

Необходимым и достаточным условием ЭСК-устойчивости тора Γ [см. (4.3)] будет неравенство $\max_s \gamma(s) < 0$, где

$$\gamma(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(2\frac{\partial f}{\partial r}(r_0, s + \alpha t, \beta t) + \frac{\partial \sigma^2}{\partial r}(r_0, s + \alpha t, \beta t) \right) dt.$$

Пусть

$$f(r, \varphi, \psi) = \frac{1}{4}\mu(\varphi, \psi) r[(\frac{r}{r_0})^2 - 1], \quad \sigma(r, \varphi, \psi) = \sqrt{\theta(\varphi, \psi)}(r - r_0).$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \varphi, \psi) = \frac{1}{2}\mu(\varphi, \psi), \quad \frac{\partial \sigma^2}{\partial r}(r_0, \varphi, \psi) = \theta(\varphi, \psi)$$

и

$$\gamma(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\mu(s + \alpha t, \beta t) + \theta(s + \alpha t, \beta t)] dt.$$

Исследуем устойчивость тора для функций вида

$$\begin{aligned} \mu(\varphi, \psi) &= \mu_0 + \mu_1 \sin(k\varphi)\sin(l\psi), \\ \theta(\varphi, \psi) &= \theta_0 + \theta_1 \sin(m\varphi)\sin(n\psi), \end{aligned}$$

где k, l, m, n – натуральные числа, $|\theta_1| \le \theta_0$.

Здесь возможны случаи

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad k\alpha \ne l\beta, \quad m\alpha \ne n\beta, \quad \gamma(s) = \mu_0 + \theta_0,\\
&\text{б)}\quad k\alpha = l\beta, \quad m\alpha \ne n\beta, \quad \gamma(s) = \mu_0 - \frac{\mu_1}{2}\sin(ks) + \theta_0,\\
&\text{в)}\quad k\alpha \ne l\beta, \quad m\alpha = n\beta, \quad \gamma(s) = \mu_0 + \theta_0 - \frac{\theta_1}{2}\sin(ms),\\
&\text{г)}\quad k\alpha = l\beta, \quad m\alpha = n\beta, \quad \gamma(s) = \mu_0 - \frac{\mu_1}{2}\sin(ks) + \theta_0 - \frac{\theta_1}{2}\sin(ms).
\end{aligned}$$

При этом условия устойчивости имеют вид

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \mu_0 + \theta_0 < 0,\\
&\text{б)}\ \mu_0 + \frac{|\mu_1|}{2} + \theta_0 < 0,\\
&\text{в)}\ \mu_0 + \theta_0 + \frac{|\theta_1|}{2} < 0,\\
&\text{г)}\ \mu_0 + \theta_0 + \frac{|\mu_1| + |\theta_1|}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Как видим, рассматриваемая система наиболее устойчива при иррациональном значении числа вращения $\nu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, т. е. при $\alpha \ne \frac{l}{k} \ne \frac{n}{m}$. В этом случае параметры μ_1, k, l и θ_1, m, n не влияют на устойчивость. При рациональном ν возможны резонансные случаи б) $\nu = \frac{l}{k}$, в) $\nu = \frac{n}{m}$, г) $\nu = \frac{l}{k} = \frac{n}{m}$, для которых изменять μ_1 и θ_1 можно лишь в определенных пределах. В случаях резонанса свойство устойчивости перестает быть грубым. Сколь угодно малое изменение α и β разрушает резонанс, функция $\gamma(s)$ убывает скачком. При этом запас устойчивости системы резко возрастает.

Литература

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 809–823.

2. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

3. Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б. Устойчивость и стабилизация орбит автономных систем при случайных возмущениях // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56, № 6. С. 951–958.

4. Ряшко Л. Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Там же. 1996. Т. 60, № 4. С. 582–594.

5. Башкирцева И. А., Исакова М. Г., Ряшко Л. Б. Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 12. С. 1–6.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
7. Левит М. В., Якубович В. А. Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36, № 1. С. 142–148.
8. Ряшко Л. Б. Стабилизация линейных стохастических систем с возмущениями, зависящими от состояния и управления // Там же. 1979. Т. 43, № 4. С. 612–620.
9. Ряшко Л. Б. Стабилизация линейных систем с мультипликативными шумами при неполной информации // Там же. 1981. Т. 45, № 5. С. 778–786.
10. Ryashko L. B. Stability and stabilization of SDEs with periodic coefficients // Dynamic Systems and Applications. 1999. Vol. 8. P. 21–34.
11. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 28.05.2001 г.